کوتاه‌ترین فاصله‌ی یک نقطه از یک سهمی

. یک شهاب‌سنگ در حال حرکت در طول مسیری با معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$y = x^2 + 3x - 6$$

یک ایستگاه فضائی در نقطه‌ی $(x, y) = (2, 2)$ واقع شده است.

a. با استفاده از ضرائب لاگرانژی، در نزدیک‌ترین نقطه‌ی تقرب، برای یک معادله‌ی درجه سوم x بدست آورید.

b. نزدیک‌ترین نقطه‌ی تقرب (x, y) و فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(2, 2)$ را بیابید.

خلاصه صورت سوال:

مسیر حرکت $y = x^2 + 3x - 6$ می ابشد و کمترین فاصله نقطه (۲و۲) از این منحنی چیست؟

نقطه (x, y) را روی منحنی در نظر می گیریم و می خواهیم فاصله اش تا نقطه بالا مینیمم شود لذا داریم:

$$H = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + \lambda(y - x^2 - 3x + 6) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_x = x(1-2\lambda) - 2 - 3\lambda = 0 \\ H_y = y - 2 + \lambda \\ y = x^2 + 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 - y \\ \lambda = \dfrac{x-2}{2x+3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3x+8}{2x+3}$$

$$\to x^2 + 3x - 6 = \frac{3x+8}{2x+3} \Rightarrow 2x^3 + 9x^2 - 6x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1.6603 \to y = 2.0537 \Rightarrow p(1.6603, 2.0537) \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \xrightarrow{a=(1.6603-2),b=(2.0537-2)} d = \sqrt{0.1182} = 0.3438$$

$$\Rightarrow x = -4.5833,\ 1.6603,\ -1.5770$$

میانگین هندسی کمتر یا مساوی میانگین حسابی می باشد:

نشان داد مینیمم توابع کروی:الف)

$$a) H = \frac{1}{2}(xyz)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) \Rightarrow \begin{cases} H_x = xy^2z^2 + 2\lambda x \\ H_y = yx^2z^2 + 2\lambda y \\ H_z = zx^2y^2 + 2\lambda z \end{cases} \to$$

$$2\lambda = -y^2z^2 = -x^2z^2 = -x^2y^2 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow 3x^2 = r^2$$

$$\Rightarrow L_{\min} = x^3 = (\frac{r^2}{3})^3$$

ب)

$$H=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+\lambda((\mathrm{xyz})^2-(\frac{r^2}{3})^3)\Rightarrow\begin{cases}H_x=x+2\lambda xy^2z^2\\H_y=y+2\lambda yx^2z^2\\H_z=z+2\lambda zx^2y^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\Rightarrow x^2=y^2\\\frac{y}{z}=\frac{z}{y}\Rightarrow y^2=z^2\end{cases}\Rightarrow x^2=y^2=z^2\Rightarrow(x^2)^3=(\frac{r^2}{3})^3\Rightarrow x^2=\frac{r^2}{3}$$

$$\to L_{\max}=3x^2=3\frac{r^2}{3}=r^2$$

ج) با استفاده از روابط الف و ب می توان نوشت:

$$H=n(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}+\lambda(\mathrm{a}_1^n+\mathrm{a}_2^n+\ldots\mathrm{a}_n^n-\mathrm{r}^n)\xrightarrow{(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}=A}\left(\begin{cases}H_{a_1}=A+n\lambda a_1^n=0\Rightarrow A=-n\lambda a_1^n\\ \cdot\\ \cdot\\ A=-n\lambda a_n^n\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n\Rightarrow\min\mathrm{nA}=\mathrm{na}_1\Rightarrow\mathrm{na}_1\le nA\Rightarrow a_1\le A$$

$$\textit{with respect part } b: H=a_1+a_2+\ldots a_n+\lambda(\mathrm{A}-\mathrm{r}^{\frac{1}{n}})\xrightarrow{a_1+a_2+\ldots a_n=B}$$

$$\mathrm{H}_{a_1}=1+\frac{\lambda}{na_1}A,\ldots\ldots H_{a_n}=1+\frac{\lambda}{na_n}A\Rightarrow a_1=a_2=\ldots.=a_n\to$$

$$\max(a_1+a_2+\ldots a_n)=\mathrm{na}_1\Rightarrow\frac{B}{n}\ge a_1$$

$$\textit{we have}\begin{cases}\frac{B}{n}\ge a_1\\a_1\le A\end{cases}\Rightarrow\frac{B}{n}\ge A \textit{ or } (\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$$